主催：電子情報通信学会、NOLTAソサイエティ、基礎・境界ソサイエティ
2023 IEEE Gustav Robert Kirchhoff Award 受賞記念講演会

カオス研究のアルファとオメガ

（解説と回想）

日時：10月13日（金） 15:00-17:00
場所：京都大学　国際科学イノベーション棟　シンポジウムホール

上田 晥亮 (京都大学名誉教授)

ご理解して頂くための準備 (厳密さ 欠如表現)

決定論的現象と確率論的現象（秩序現象と不規則現象）・・・・ 因果律

乖離概念 ・・・・ 上記二現象は異なる世界の出来事(哲学の常識)

決定論的 ODE が不規則現象を表している ・・・・ カオスが注目された理由

常微分方程式 ・・・・ 自律系、非自律系、 線形 非線形など と分けられる

常微分方程式が定義する運動の規則 ・・・・ 力学系 写像 変換 などと呼ばれる
連続力学系 離散力学系

本講演の対象：現象を記述する2次元の常微分方程式 ODE ・・・・
時間の経過に伴って平面上を運動する点(x, y)の規則を表したもの
ただし その規則は 一対一 両連続 向きを変えない 3性質をもっている ◎◎

対象とする系 ・・・・ 運動が過渡状態から定常状態へと進展する散逸力学系

準備 (続き 1)

過渡状態は有限時間で定常状態に到達する‥‥ この記述？

計算機が描き出す軌道は誤差(外乱)の影響を受け試行ごとに異なる‥‥ この記述？

相平面、初期値、動作点、状況点、解曲線、軌道、軌跡、など ‥‥
これらの定義はしっかり納得しておいてください

同じ学術語が区別されずに使われている‥‥ 例えば、『解』、『カオス解』
理論では ODE の厳密解、現実には ODE の近似解(計算機解)
同じ学術語が区別されずに使われることがカオス関連の文献を難解にしている
だが　一々区別出来ない　一行の文においても使われる事がある

『相平面』や『点、曲線』の解釈ですが、皆さんは何時も下記を意識しておられますか？

理論‥‥ 相平面は平面全域、点や曲線は無限桁の実数(大きさ太さは零)
後の図をご覧いただく際は、このことを思い出してください(勿論、見えません)　◎◎
アナログ(計算機)実験 ‥‥ 相平面は有限領域　精度 高々2桁半の実数
デジタル(計算機)実験 ‥‥ 相平面は格子点 (計算機 ε) 精度 高々15桁の実数

準備 (続き 2)

準備として、2次元自律系の微分方程式が表す平衡点
結節点　鞍形点　渦状点　渦心点
結節点と渦状点には　漸近安定なものと不安定なものがある

2次元非自律周期系の常微分方程式が表す不動点と周期点

不動点は外力周期と同じ周期を持つ周期解を、
周期点は外力周期の n 倍周期を持つ周期解を現わしている

不動点・周期点は
完全安定な不動点・周期点　完全不安定な不動点・周期点、
および 鞍形不動点・鞍形周期点に分類されている

鞍形の不動点・周期点には正不安定なものと逆不安定なものに分類されている
自律系の鞍形点、非自律周期系の鞍形不動点(周期点)は
αブランチとωブランチをもっている（周期点は周期ブランチ）◎◎
しかも αブランチ同士 ωブランチ同士が交わる事はありません

対象とした常微分方程式と現象

Duffing方程式・・・・2階非線形常微分方程式、復元項が非線形

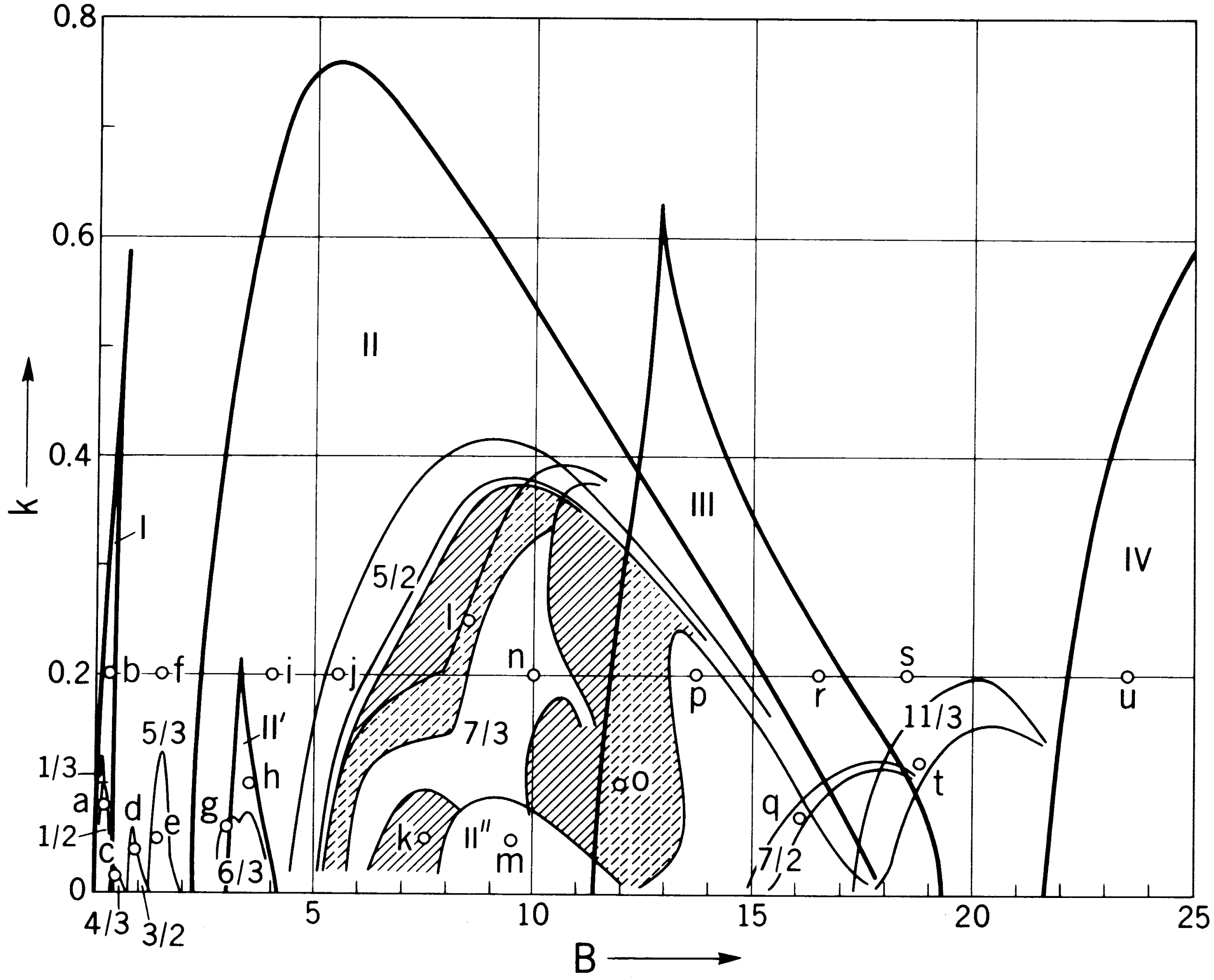
$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + x^3 = B\cos t$$

一階連立系に書き直せば：

$$\frac{dx}{dt} = y$$

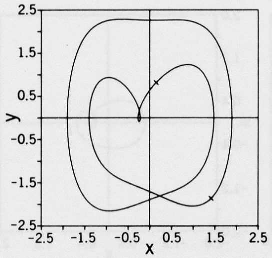
$$\frac{dy}{dt} = -ky - x^3 + B\cos t$$

対象とした常微分方程式と現象 (続き 2)

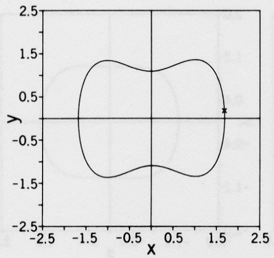


定数値(k, B)によって種々の振動が発生する

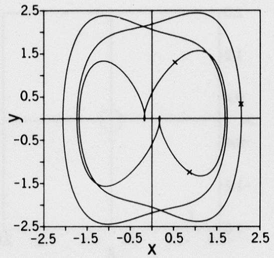
(k) Ueda’s Chaotic Attractor
(o) Japanese Attractor



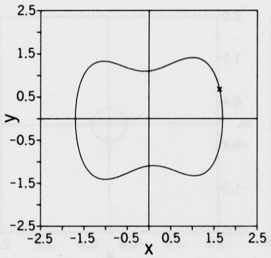
(d_3) k = 0.04, B = 0.90



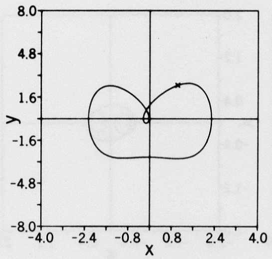
(e_1) k = 0.05, B = 1.40



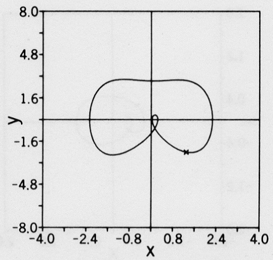
(e_2) k = 0.05, B = 1.40



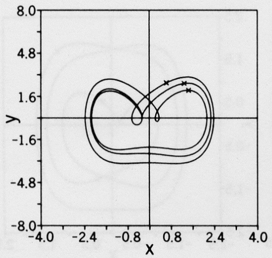
(f) k = 0.20, B = 1.50



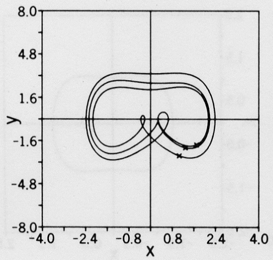
(g_1) k = 0.06, B = 3.00



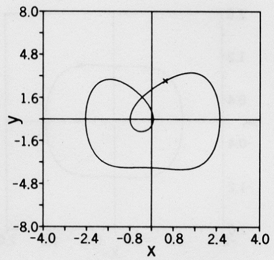
(g_2) k = 0.06, B = 3.00



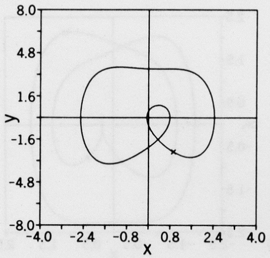
(g_3) k = 0.06, B = 3.00



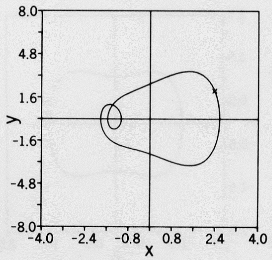
(g_4) k = 0.06, B = 3.00



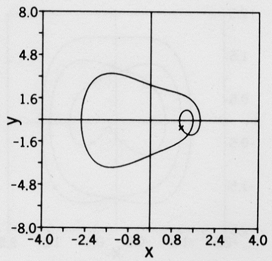
(h_1) k = 0.10, B = 3.50



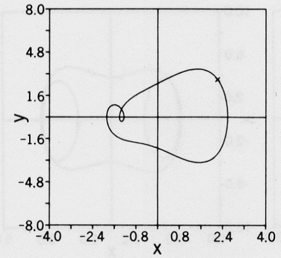
(h_2) k = 0.10, B = 3.50



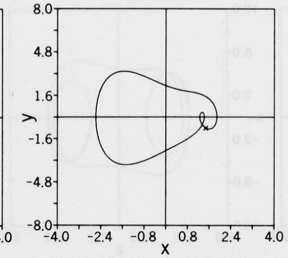
(h_3) k = 0.10, B = 3.50



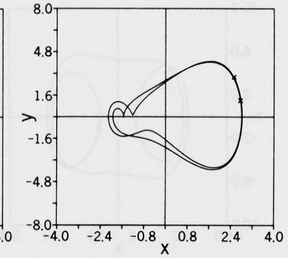
(h_4) k = 0.10, B = 3.50



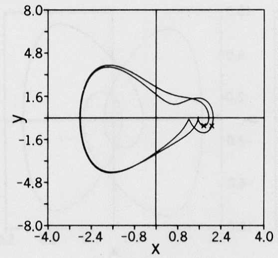
(i_1) k = 0.20, B = 4.00



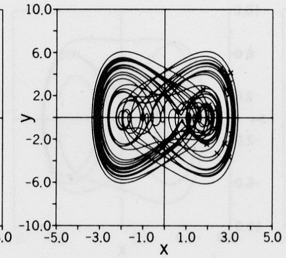
(i_2) k = 0.20, B = 4.00



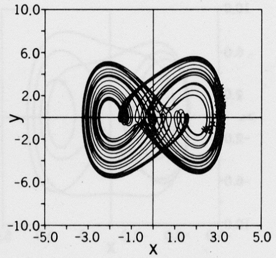
(j_1) k = 0.20, B = 5.50



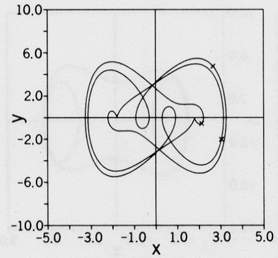
(j_2) k = 0.20, B = 5.50



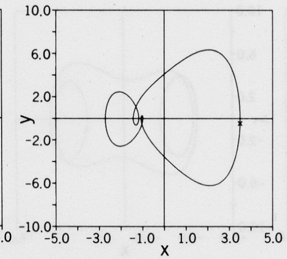
(k) k = 0.05, B = 7.50



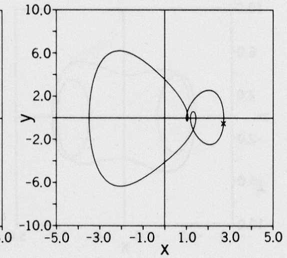
(l_1) k = 0.25, B = 8.50



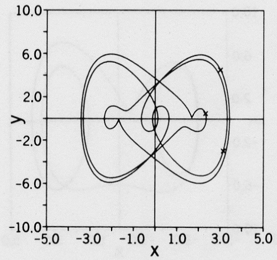
(l_2) k = 0.25, B = 8.50



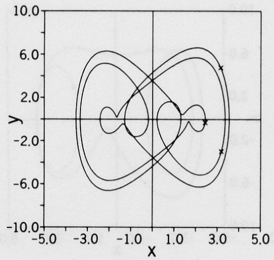
(m_1) k = 0.05, B = 9.50



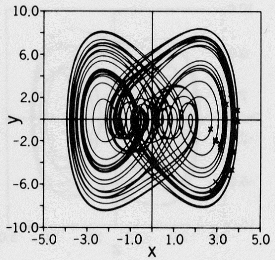
(m_2) k = 0.05, B = 9.50



(m_3) k = 0.05, B = 9.50



(n) k = 0.20, B = 10.0



(o_1) k = 0.10, B = 12.0

私の研究が評価を受けた経緯

初めて招待されたのは Frank Moon と Phil Holmes ら主催の‥ 1979
SIAM 国際会議　で下記を発表した
『Steady Motions Exhibited by Duffing's Equation:
A Picture Book of Regular and Chaotic Motions』

続いて、次の週 New York 科学アカデミー主催の国際会議‥‥ 1979
国際会議 Nonlinear Dynamics で下記を発表した
『Explosion of Strange Attractors Exhibited by Duffing's Equation 』
この時は、‥‥！　　　　　◎◎

ーーー この頃から　俄かにカオス研究者が爆発(出現)　世紀初頭に消散 ーーー

Japanese Attractor は David Ruelle が命名した ‥‥ 1980
彼はカオスの解説(啓蒙)記事を　フランス語、英語、チェコ語、数学カレンダー
で紹介した

Ueda's Chaotic Attractor は J.M.T.Thompson と H.B.Stewart が命名 ‥ 1984
『Nonlinear Dynamics and Chaos』John Wiley and Sons

先のURLは R.H. Abraham と H.B. Stewart が私の論文を選択、英訳、編集 ‥1992
The Science Frontier Express Series 『The Road to Chaos』Aerial Press
この書物の題名にある定冠詞が微かな物議を‥‥とか！？

そろそろ本題へ

その前に資料現物をご覧ください

Duffing方程式が表す系に観察される
Ueda’s Chaotic Attractor を対象として

UCA は定数値(k, B)を(0.05, 7.5)とおいた系に現れる（UCA系と呼ぶ）　◎◎
UCA系は2次元連立方程式として表しておく

UCAはカオス定常振動を表わしている‥‥ 図は適当な初期値からUCA系の計算機解を追跡し、
ある程度の時間が経過した後、外力周期の時間間隔でストロボ観測を行った
ストロボ観測点列を x,y 平面にプロットしたものである（ストロボ観測の位相は 0 ）

カオスアトラクタUCA上の任意の初期点から出発する観測点列は、
1. 実験の試行ごとに異なる運動が観測される（アナログ実験）
2. 同点列は経過時間が短いときは、ある程度の精度で予測される（ア・デ実験）
3.同点列は経過時間が長くなれば、予測不可能な振る舞いをする
（1 は初期値鋭敏依存性、2 は短時間の予測可能性、3 は長時間の予測不可能性）

図が示すアトラクタの形状が表す x, y 平面上の点集合(領域)をアトラクタの存在域と呼ぶ

では、図示のUCA(実験)はUCA系方程式の厳密解について、如何なる情報を提供しているか？
先ずは、相平面上のアトラクタ存在域を隈なく巡る解を求めようとするのでは？

そもそも、数値実験結果と理論厳密解はどの様な関係だろうか？

数値実験結果を読み解く

UCA、正不安定不動点Dのαブランチとωブランチの実験結果　◎◎

描画結果を仔細に検討すれば　描画したαブランチを限りなく延長したものが
UCAの形状に一致し ωブランチを限りなく延長したものは相平面を
埋め尽くすPeano曲線状に振る舞っているようだ　◎◎

実験結果の総括から　αブランチ上には非可算無限個の二重漸近点
が稠密に分布していることが推測される　◎◎
【二重漸近構造の説明は次ページに割り込む】

UCA内の全ての不動点と周期点の集合を UCA の周期集合 P と表す
実験結果の総括からUCA の周期集合 Pの濃度は非可算無限個である

周期集合 P を相平面にプロットしたものは　不動点Dの不変ブランチ
を描いた実曲線(太さを持つ曲線)上の連続曲線(微分可能性は不明)
となるに違いない(想像)　◎◎

【UCAのホモクリニック集合とヘテロクリニック集合】

鞍形不動点 D 外の点 p からの完全列を考えた時、点 p の α 極限点
およびω極限点がいずれも鞍形不動点 D となる時
点 p はホモクリニック点と呼ばれる

二個の鞍形不動点に対して　点 p の α 極限点とω極限点が それぞれ
異なる不動点となる時　点 p はヘテロクリニック点と呼ばれる

ホモクリニック点は一個の鞍形不動点(周期点)の不変ブランチの交点
ヘテロクリニック点は異なる二個の鞍形不動点のαブランチと
ωブランチの交点となっている

UCA上の全てのホモクリニック点　ヘテロクリニック点の集合を　それぞれ
UCAのホモクリニック集合　UCAのヘテロクリニック集合　と呼ぶ

UCA内の任意のヘテロクリニック点はUCAのホモクリニック集合の集積点とである

数値実験結果を読み解く（続き）

鞍形不動点 D の実不変ブランチの形状(概容)は先に示したが　この図の
αブランチを無限に延長した時の極限集合(の概容)は、
さきのストロボ観測点列に他ならない
あるいは
周期集合 P の全ての元のαブランチの集合は図示の実αブランチに含まれている
のではないだろうか (この実不変ブランチを周期集合のαブランチと呼ぶ)
(実不変ブランチ　実ブランチを帯状に拡幅した点集合)

この推量を取り入れて　鞍形不動点 D の不変ブランチの形状図のαブランチを
ストロボ観測点列によって置き換え 同図のωブランチに
逆写像を施した(ωブランチの延長図)肖像図を描いておいた　　　◎◎

これらの二枚の肖像図は　次に述べるカオスアトラクタの重要な性質を示唆している

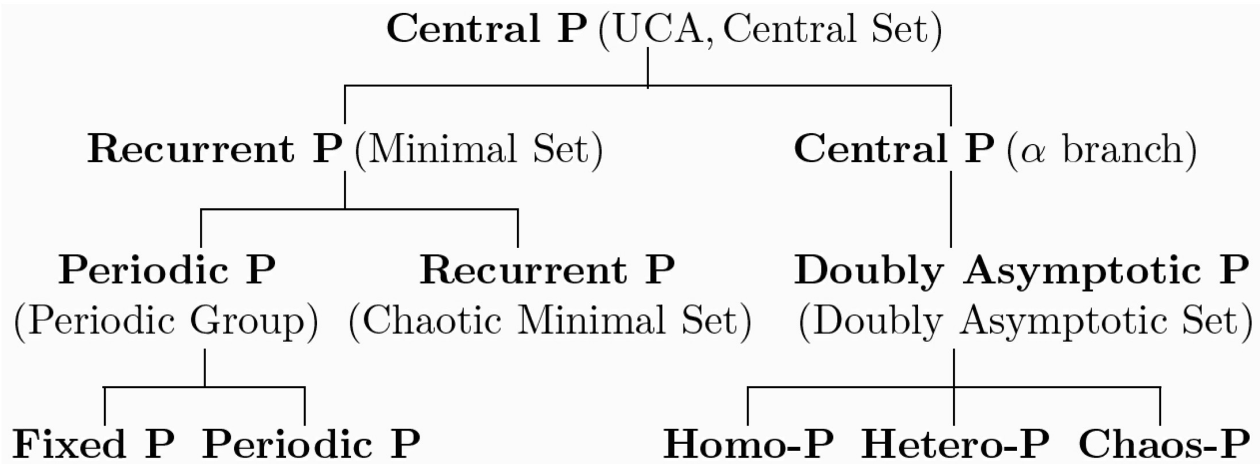
その性質は『UCA上の任意の点(後述の中心点)の近傍は 周期集合 P の任意の2点
を繋ぐ二重漸近点を含んでいる』と記述される　　（大胆な仮説）

上記末尾の（大胆な）は（もう少し検討したい 事がある）と解釈下さい

UCAの分解

Birkhoff と Smith は 回帰点を中心点と呼んだ　また 回帰点でない点も回帰点(集合)の集積点である場合は 中心点と呼んだ
つまり UCA においては 二重漸近集合の元も中心点である

この時　UCA は次のように分解される



上のダイヤグラムに見られる Chaotic Minimal Set や Chaos-P は第三極小集合を考察した名残だが 本講演では割愛する　これらはまず存在しないと思うので 空集合と見なして良いだろう（悪魔の証明に苦しんだ記録です）

UCAの分解 (円盤で記したストロボ観測点)

カオスアトラクタを　ストロボ観測点(円盤)列で描画した
中心点の解釈

実験結果を現わす場合 (円盤は) 1 個のストロボ観測点

理論的に(円盤は) 中心点の円近傍　この円近傍は
無限個の鞍形周期点(不動点) に加えて
フラクタル状に 積層する n 周期αブランチ弧
（弧上には ホモクリニック点 ヘテロクリニック点）
を含んでいる

これらの二重漸近点は 先に述べた際立った性質を持っている

【回帰点でない中心点; 補】

Birkhoff と Smith は 回帰点でない点も 回帰点集合の集積点である場合は
中心点と呼んだ　つまり UCAのαブランチ上の点(ホモクリニ
ック点とヘテロクリニック点)は回帰点でない中心点となる

UCAのホモクリニック点(やヘテロクリニック点)の近傍には 無数の
周期点がある　これらはホモクリニック点やヘテロクリニック点
の完全列に(確率的ではあるが 実現象に)回帰性を付与している

Birkhoff と Smithが 回帰点でない点を (実現象では不可避的に現れる)
回帰的な性質に着目し 中心点 と呼んだことに 脱帽している

これにより カオスアトラクタ UCA を『中心点の集合』
と明確に定義することが出来た

将に 不規則遷移現象の本質を突いた慧眼としか言いようがない

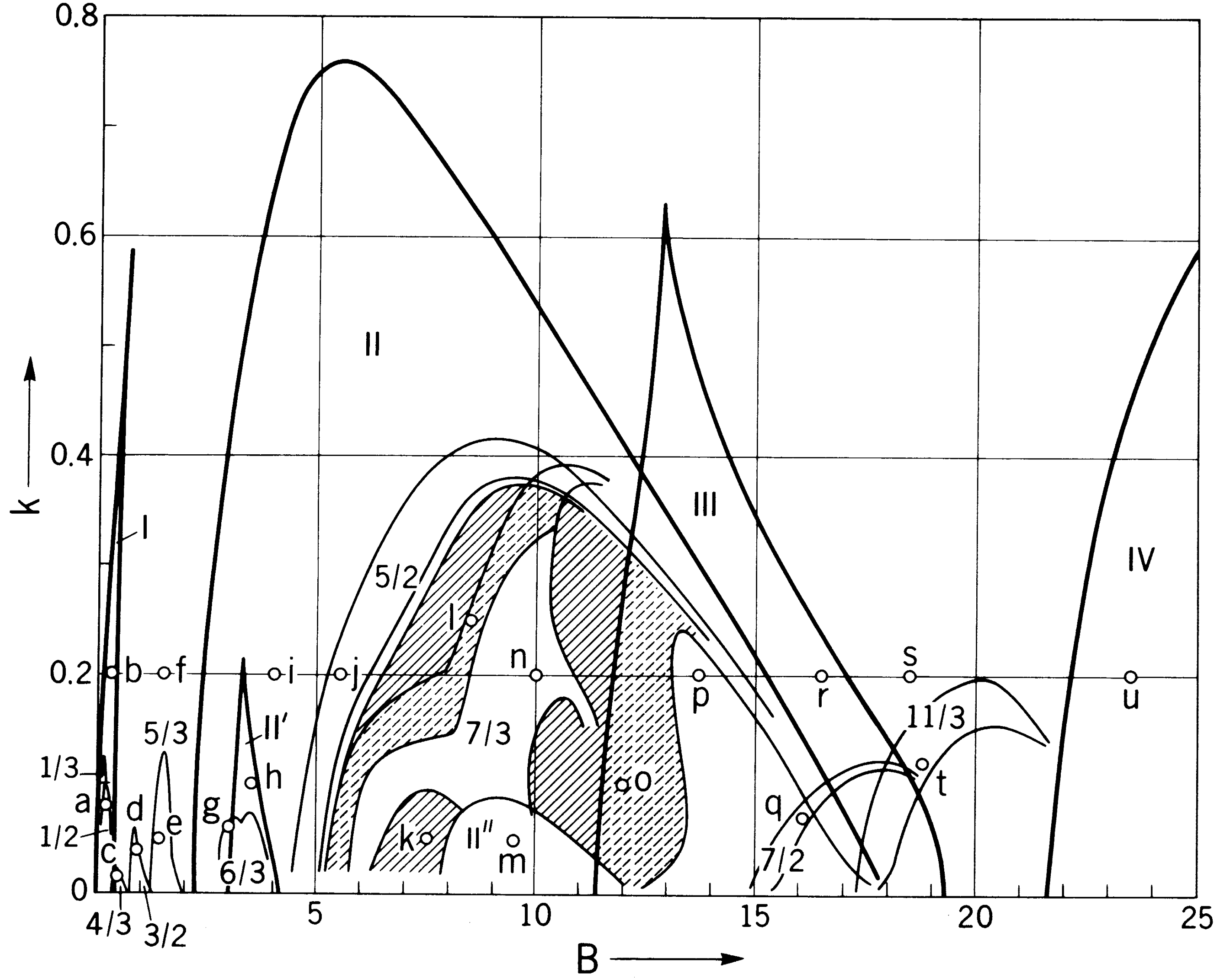
UCAの構造安定性

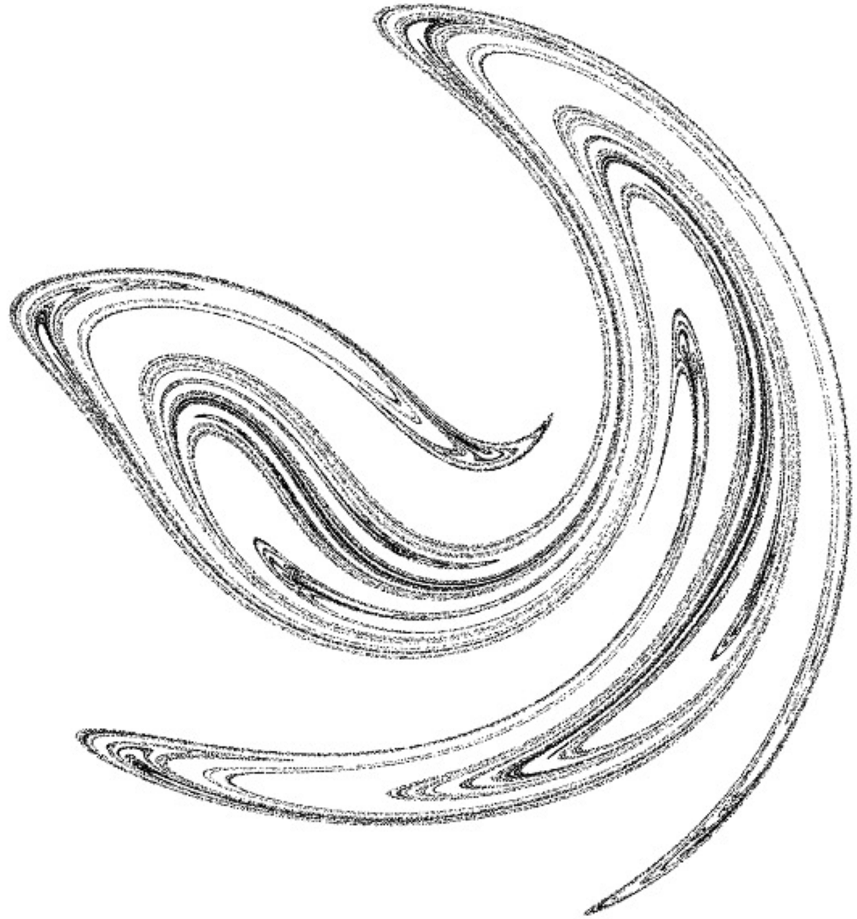
UCA の特殊形ホモクリニック点 および 高次周期点は 系の定数値が
摂動を受けて消滅しても　その近傍に新たな特殊形ホモクリニック点
高次周期点が現れていることは 容易に推測される

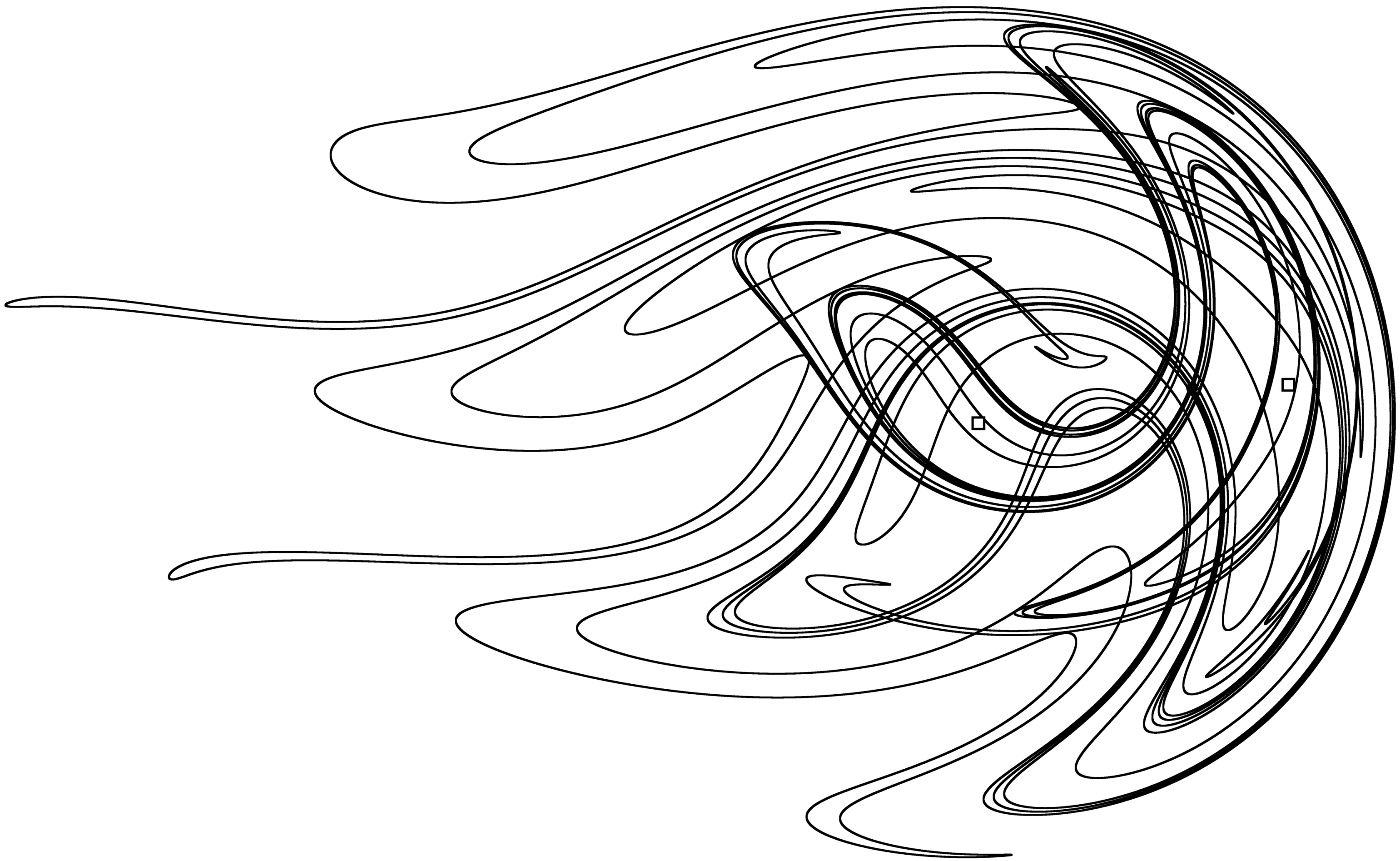
これを以って　UCA は Andronov と Pontriyagin の意味で
構造不安定と判定した（彼らは無接点を必要十分条件としている）

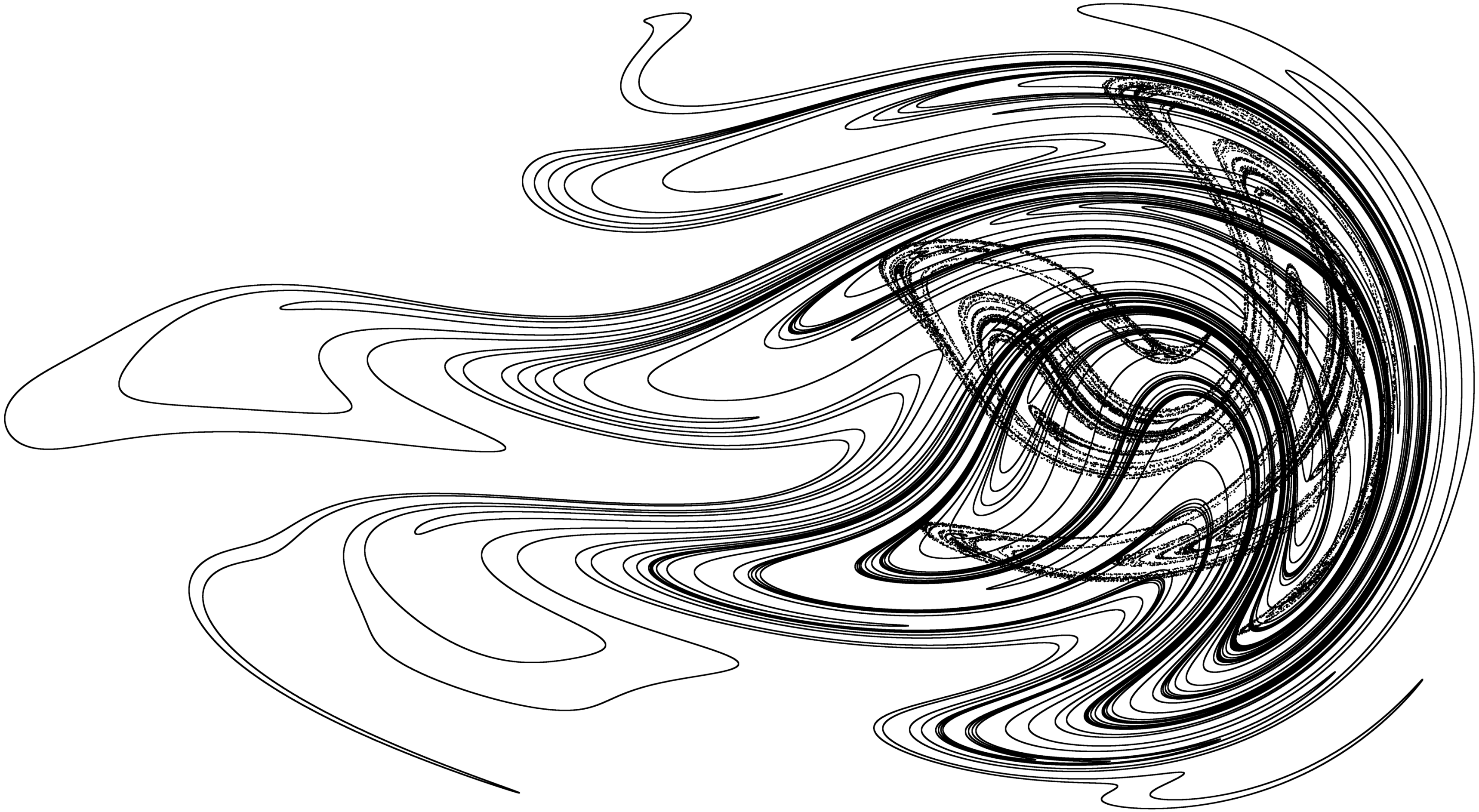
しかし　UCA が本来の意味で構造安定性を持つことに疑いの余地
はない　しかし UCA は構造不安定 と言っても耳を傾ける聴講者に
恵まれ無かったので UCA は実体安定性を持つと主張した　しかし
不要な術語だと考えて居る（A と P の意味で構造不安定と言えば駄目な
理由は『前提条件は自律系』を多数の研究者が見逃している？・・・・）

しかし 特殊形ホモクリニック点近傍の周期点の実態を議論した報告書
の有無 などに関する情報を筆者は知らない　この点が不安である
（乞う ご教示）


0.8
0.6
0.4
0.2
0
k
B
5
10
15
20
25
4/3
3/2
I
II
III
IV
II'
II''
1/3
1/2
5/3
6/3
5/2
7/3
7/2
11/3
a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m
n
o
p
q
r
s
t
u







長時間 ご清聴くださり

誠に有難うございました